出題のねらい

教科書にある基本的な内容が、確実に理解できているかどうかを問うています。問題は全問客観式です。このため、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力を求めています。加えて、誘導のある設問では、読解力や思考力も求めています。

$\boxed{1}$ 「数学Ⅰ・A」の各分野の基本的な内容を問いました。「数と式」、「2次関数」、「場合の数と確率」、「図形と計量」、「整数の性質」の各分野から出題しました。

$\boxed{2}$ 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。「式と証明」、「図形と方程式」、「指数関数と対数関数」、「三角関数」の各分野から出題しました。

$\boxed{3}$ 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」の分野から出題しました。図形で囲まれた部分の面積の関係について問いました。最初の小問の考え方を利用して、後に続く小問の答えを導き出します。

$\boxed{4}$ 「ベクトル」の分野から出題しました。内分点の位置ベクトルや内積の計算など、ベクトルの基本的な内容が理解できているかどうかを問いました。

$\boxed{1}$

【解　答】（40 点）

(1)	$\sqrt{\boxed{1}}-\sqrt{\boxed{2}}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	(2 点)
	$\boxed{3}\boxed{4}$	10	(4 点)
(2)	$\boxed{5}$	0	(2 点)
	$\boxed{6}$	8	(3 点)
	$x=\boxed{7}$, $y=\boxed{8}$	2, 2	(3 点)
(3)	$\boxed{9}\boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}$	3360	(2 点)
	$\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}$	360	(2 点)
	$\boxed{16}\boxed{17}\boxed{18}\boxed{19}$	1800	(4 点)
(4)	$\boxed{20}:\boxed{21}:\boxed{22}$	7 : 8 : 5	(2 点)
	$\boxed{23}\boxed{24}^\circ$	60°	(2 点)
	$\boxed{25}\boxed{26}\sqrt{\boxed{27}}$	$30\sqrt{3}$	(4 点)
(5)	$\boxed{28}$	5	(2 点)
	$\boxed{29}\boxed{30}$	11	(3 点)
(6)	$x=\boxed{31}$, $y=\boxed{32}$	3, 1	(2 点)
	$\boxed{33}$	4	(3 点)

【解　説】

(1)　$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ のとき，

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-2=10$$

［別解］

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$$

$$=3+2\sqrt{6}+2+3-2\sqrt{6}+2=10$$

(2)　$y=4-x$ …①

$x^2-y^2=x^2-(4-x)^2=8x-16$　から　$-1\leqq x\leqq 2$

において，最大値は　$x=2$　のとき

$$x^2-y^2=8\cdot 2-16=0$$

また，$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2$

$$=2x^2-8x+16=2(x-2)^2+8$$

よって，x^2+y^2 は $x=2$ で最小値 8 をとる。

このとき，①から　$y=4-2=2$

(3)　K が 2 個，A が 3 個，その他は 1 個ずつ，計 8 個。

同じものを含む 8 個の並べ方は $\dfrac{8!}{2!3!}=3360$（通り）

そのうち，3 個の A が連続するような並べ方は，3 個の A をひとかたまりと考えて，

$$\frac{6!}{2!}=360\ （通り）$$

A が連続しない並べ方は，まず K，W，S，K，I の 5 個を並べ，その両端または間の 6 か所のうち，いずれかに 3 個の A を 1 個ずつ入れることを考えて，

$$\frac{5!}{2!}\cdot{}_6C_3=1200\ （通り）$$

よって，２個の A だけが連続するような並べ方は，３個の A が連続する並べ方と A が連続しない並べ方の余事象を考えて，

$$3360-\left(360+1200\right)=1800$$ （通り）

［別解］

K，K，W，S，I の５個を並べ，その両端と間の６か所のうちの２か所に２つをまとめた $\boxed{\mathrm{AA}}$ と１つの $\boxed{\mathrm{A}}$ を入れることを考えて，

$$\frac{5!}{2!}\times{}_6\mathrm{P}_2=60\times30=1800$$ （通り）

(4) $\dfrac{\sin A}{7}=\dfrac{\sin B}{8}=\dfrac{\sin C}{5}$ より，

$\sin A:\sin B:\sin C=7:8:5$

△ABC において，正弦定理より

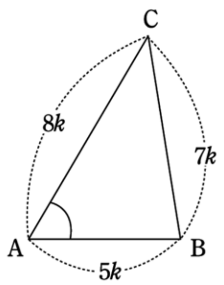
$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{\mathrm{CA}}{\sin B}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin C}$$

よって

$$\mathrm{BC}:\mathrm{CA}:\mathrm{AB}=\sin A:\sin B:\sin C=7:8:5$$

したがって

$\mathrm{BC}=7k$， $\mathrm{CA}=8k$， $\mathrm{AB}=5k$ （$k>0$）…① とおけて



余弦定理から

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{(8k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot8k\cdot5k}=\frac{40k^2}{2\cdot8k\cdot5k}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ<\angle\mathrm{BAC}<180^\circ$ より $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$

よって，△ABC の外接円の半径が７のとき，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin60^\circ}=2\cdot7$$

①より

$$7k=2\cdot7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad k=\sqrt{3}$$

よって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot8\sqrt{3}\cdot5\sqrt{3}\cdot\sin60^\circ=30\sqrt{3}$$

(5) クラスの生徒全員の集合を U, 犬を飼っている生徒の集合を A, 猫を飼っている生徒の集合を B とする。

条件から　$n(U)=35$， $n(A)=20$， $n(B)=11$

（ｉ） $n\left(\overline{A\cup B}\right)=9$ より

$$n(A\cup B)=n(U)-n\left(\overline{A\cup B}\right)=35-9=26$$

よって， $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ から

$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=20+11-26=5$$

（ⅱ）どちらも飼っている生徒の数が最大となるのは $B\subset A$ の場合であり， $A\cap B=B$ のときであるから

$$n(A\cap B)=n(B)=11$$

すなわち，どちらも飼っている生徒は 最大で 11 人

(6) $x^2-y^2=8$， $(x+y)(x-y)=8$

x，y は整数であるから，$x+y$，$x-y$ も整数である。

よって

$(x+y,\ x-y)=(8,\ 1),(4,\ 2),(2,\ 4),(1,\ 8),(-1,\ -8),(-2,\ -4),$
$(-4,-2),(-8,-1)$

このうち， $x+y$ か $x-y$ が１か－１である場合は， $x=\dfrac{(x+y)+(x-y)}{2}$ と $y=\dfrac{(x+y)-(x-y)}{2}$ がともに整数にならない。

したがって， x， y がともに自然数であるものは

$$(x,\ y)=(3,1)$$

整数 x， y の組は

$$(x,\ y)=(3,1),(3,-1),(-3,1),(-3,-1)$$

の４通りある。

2

【解　答】（20点）

(1)	$\boxed{34}x+\boxed{35}$	$-x+5$	（2点）
	$\boxed{36}\boxed{37}$	-1	（3点）
(2)	$\boxed{38}$	4	（2点）
	$\boxed{39}\boxed{40}$	-4	（3点）
(3)	$\boxed{41}$	4	（2点）
	$\boxed{42}-\log_3\boxed{43}\boxed{44}$	$3-\log_3 26$	（3点）
(4)	$\boxed{45}-\boxed{46}\sin^2\alpha$	$1-2\sin^2\alpha$	（2点）
	$\frac{\boxed{47}}{\boxed{48}}\pi\leqq x\leqq\frac{\boxed{49}}{\boxed{50}}\pi$	$\frac{1}{6}\pi\leqq x\leqq\frac{5}{6}\pi$	（3点）

【解　説】

(1)　剰余の定理から　$f(-2)=7$，$f(1)=4$　…①

$f(x)$ を $(x+2)(x-1)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$，

余りを　$ax+b$　とおくと，

$$f(x)=(x+2)(x-1)Q_1(x)+ax+b$$

①より

$$\begin{cases}-2a+b=7\\ a+b=4\end{cases}$$ これを解いて　$a=-1$，$b=5$

よって，$f(x)$ を $(x+2)(x-1)$ で割った余りは

$-x+5$

$f(x)=(x+2)(x-1)Q_1(x)-x+5$　であるから

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+2)(x-1)Q_1(x)-(x+2)+7\\ &=(x+2)\{(x-1)Q_1(x)-1\}+7\end{aligned}$$

すなわち，$f(x)$ を $x+2$ で割ったときの商は

$(x-1)Q_1(x)-1$　であるから，この商を $x-1$ で

割ったときの余りは　-1

［(1) 後半部分の別解］

$f(x)$ を $x+2$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすれば，

余りが7より

$$f(x)=(x+2)Q_2(x)+7$$

さらに，商 $Q_2(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を

$Q_3(x)$，余りを R とおくと，

$$Q_2(x)=(x-1)Q_3(x)+R$$

よって

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+2)\{(x-1)Q_3(x)+R\}+7\\ &=(x+2)(x-1)Q_3(x)+R(x+2)+7\end{aligned}$$

①より，$f(1)=4$ であるから

$$R(1+2)+7=4$$
$$R=-1$$

したがって，$Q_2(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは

-1

(2)　円 C：$(x-3)^2+(y-1)^2=5$　について，

x 軸との共有点の x 座標を求めるため $y=0$ を代入

$$(x-3)^2+(0-1)^2=5,\qquad x=1,5$$

線分ABの長さは　$5-1=4$

2点A$(5,0)$，B$(1,0)$とする。

円 C の中心の座標をC$(3,1)$とすると

直線CAの傾きは $\dfrac{0-1}{5-3}=-\dfrac{1}{2}$

よって，点 $A\left(5,0\right)$ における円 C の接線の方程式は

$y=2(x-5)$ より　$2x-y=10$　…①

同様に，直線CBの傾きは $\dfrac{1-0}{3-1}=\dfrac{1}{2}$

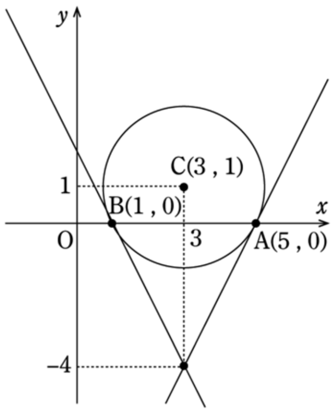
よって，点 $B\left(1,0\right)$ における円 C の接線の方程式は

$y=-2(x-1)$ より　$2x+y=2$　…②

①，②より　$x=3$，$y=-4$

したがって，求める２本の接線の交点の座標は

$\left(3,-4\right)$



［接線の交点の座標を求める別解］

円 C の２点 A, B におけるそれぞれの接線の方程式は

$$\begin{cases}\left(5-3\right)\left(x-3\right)+\left(0-1\right)\left(y-1\right)=5\\ \left(1-3\right)\left(x-3\right)+\left(0-1\right)\left(y-1\right)=5\end{cases}$$

すなわち $\begin{cases}2x-y=10\\ 2x+y=2\end{cases}$

これを解いて　$x=3$，$y=-4$

(3)　$y=\log_3 x$ …①のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に３だけ平行移動すると

$y-3=\log_3\left(x-1\right)$

$$y=\log_3\left(x-1\right)+3 \quad \cdots②$$

このグラフの x 座標が４のとき

$$\begin{aligned}y&=\log_3\left(4-1\right)+3\\&=\log_3 3+3\\&=1+3=4\end{aligned}$$

②のグラフは点 $\left(4,\ 4\right)$ を通る。

さらに，

$$\begin{aligned}\log_3 x&=\log_3\left(x-1\right)+3\\ \log_3 x-\log_3\left(x-1\right)&=3\\ \log_3\frac{x}{x-1}&=3\\ \frac{x}{x-1}&=3^3\\ x&=\frac{27}{26}\end{aligned}$$

①に代入して

$$\begin{aligned}y&=\log_3\frac{27}{26}\\&=\log_3 27-\log_3 26\\&=3-\log_3 26\end{aligned}$$

(4)　$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ …①

①の β に α を代入する。

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha+\alpha\right)&=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha\\&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ より

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha&=\left(1-\sin^2\alpha\right)-\sin^2\alpha\\&=1-2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

この２倍角の公式を用いて

$$\begin{aligned}\cos 2x+3\sin x-2&\geqq 0\\ \left(1-2\sin^2 x\right)+3\sin x-2&\geqq 0\\ -2\sin^2 x+3\sin x-1&\geqq 0\\ 2\sin^2 x-3\sin x+1&\leqq 0\\ \left(2\sin x-1\right)\left(\sin x-1\right)&\leqq 0\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\leqq\sin x\leqq 1$$

$0\leqq x<2\pi$ より

$$\frac{1}{6}\pi\leqq x\leqq\frac{5}{6}\pi$$

$\boxed{3}$

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{51}$	1	（2 点）
(2)	$a \neq \dfrac{\boxed{52}\,\boxed{53}}{\boxed{54}}$	$a \neq \dfrac{-1}{2}$	（2 点）
	$\boxed{55}\,\boxed{56}$, $\boxed{57}\,a$	-1, $2a$	（3 点）
	$\dfrac{\boxed{58}}{\boxed{59}}(\boxed{60}\,a+\boxed{61})^{\boxed{62}}$	$\dfrac{1}{6}(2a+1)^3$	（4 点）
(3)	$a^{\boxed{63}}$	a^2	（2 点）
	$\boxed{64}$, $\boxed{65}\,a$	0, $2a$	（3 点）
	$\dfrac{\boxed{66}}{\boxed{67}}a^{\boxed{68}}+a^{\boxed{69}}$	$\dfrac{4}{3}a^3+a^2$	（4 点）

【解　説】

(1)　a から b までの x の範囲について，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は，被積分関数 $f(x)$ の値が正の場合にはそのグラフの下側で x 軸との間に囲まれた面積を与える。被積分関数 $f(x)$ の値が負の場合には，x 軸と上下関係が逆転しているので，グラフの上側で x 軸との間に囲まれた面積は $-\int_a^b f(x)\,dx$ で与えられる。

問題の図を見て分かるように，被積分関数 $y=x-1$ の値は，$x>1$ で正，$x<1$ で負なので，境目の $x=1$ の前後で積分範囲を分けて定積分を計算して加えれば良い。

絶対値を用いた被積分関数 $y=|x-1|$ でも

$$|x-1|=\begin{cases} x-1\leqq 0,\ \text{つまり}\ x\leqq 1\ \text{のとき}\ -(x-1) \\ x-1\geqq 0,\ \text{つまり}\ x\geqq 1\ \text{のとき}\ x-1 \end{cases}$$

となり，$x=1$ を境目として 2 通りの 1 次関数に分けられる。これを 0 から 2 までの範囲で積分することで，前述の定積分の積分範囲を 0 から 1 までと，1 から 2 までの二つに分けて計算するのと同じことになる。なお，境界点の $x=1$ はどちらに入っても良い。

(2)　放物線 $y=-x^2+2ax+a$ …①　と

直線 $y=x-a$ …② について

$$-x^2+2ax+a=x-a$$

$$x^2-(2a-1)x-2a=0 \quad \cdots④$$

この判別式を D とすると

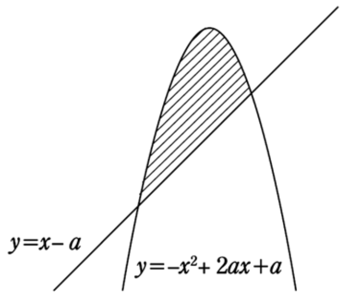
$$D=\{-(2a-1)\}^2-4\cdot 1\cdot(-2a)$$
$$=(2a+1)^2$$

よって，$a\neq -\dfrac{1}{2}$ のとき，$D>0$ であり，

①と②は異なる 2 点で交わる。

このとき，①と②の交点の x 座標は④より

$$(x+1)(x-2a)=0$$
$$x=-1,\,2a$$



上図の斜線部分の面積は

$2a>-1$ すなわち $a>-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\int_{-1}^{2a}\{(-x^2+2ax+a)-(x-a)\}\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{2a}(x+1)(x-2a)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{2a-(-1)\}^3$$

$$=\frac{1}{6}(2a+1)^3$$

$2a<-1$ すなわち $a<-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\int_{2a}^{-1}\{(-x^2+2ax+a)-(x-a)\}\,dx$$

$$=-\int_{2a}^{-1}(x-2a)(x+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(-1-2a)^3$$

$$=-\frac{1}{6}(2a+1)^3$$

(3)　(ⅰ) $a>0$ より

$$\int_0^{2a}|x-a|\,dx$$
$$=-\int_0^{a}(x-a)\,dx+\int_a^{2a}(x-a)\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_0^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^{2a}$$
$$=-\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)+\left\{\left(2a^2-2a^2\right)-\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)\right\}=a^2$$

(ⅱ) 放物線　$y=-x^2+2ax+a$　…①　の頂点の x 座標は

$y=-(x-a)^2+a^2+a$　より，a である。

①と折れ線　$y=|x-a|$　…③　の交点の x 座標を求めると

$x<a$ のとき

$-x^2+2ax+a=-(x-a)$

$x(x-2a-1)=0$

$x=0\,,\,2a+1$

$x<a$ より

$x=0$

$x\geqq a$ のとき

$-x^2+2ax+a=x-a$　より

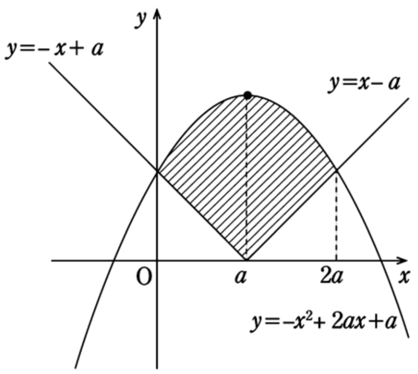
$(x-2a)(x+1)=0$

$x=2a\,,\,-1$

$x\geqq a$ より

$x=2a$

よって，　$x=0,2a$



したがって，求める面積を S とすると，(ⅰ) を用いて

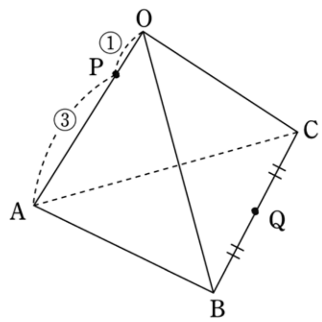
$$S=\int_0^{2a}\left(-x^2+2ax+a\right)dx-\int_0^{2a}|x-a|\,dx$$
$$=\int_0^{2a}\left(-x^2+2ax+a\right)dx-a^2$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2+ax\right]_0^{2a}-a^2$$
$$=-\frac{1}{3}(2a)^3+a(2a)^2+a\cdot 2a-a^2$$
$$=\frac{4}{3}a^3+a^2$$

4

【解　答】(20 点)

(1)	$\dfrac{\boxed{70}}{\boxed{71}}$	$\dfrac{1}{2}$	(1 点)
	$\dfrac{\boxed{72}}{\boxed{73}}\vec{a}$	$\dfrac{1}{4}\vec{a}$	(1 点)
	$\dfrac{\boxed{74}}{\boxed{75}}\vec{b}+\dfrac{\boxed{76}}{\boxed{77}}\vec{c}$	$\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$	(1 点)
	$\dfrac{\boxed{78}}{\boxed{79}}$	$\dfrac{3}{4}$	(3 点)
	$\dfrac{\boxed{80}}{\boxed{81}}$	$\dfrac{3}{8}$	(3 点)
	$\dfrac{\boxed{82}}{\boxed{83}}$	$\dfrac{1}{2}$	(3 点)
	$\boxed{84}\,\boxed{85}^\circ$	60°	(2 点)
(2)	$\boxed{86}$	0	(1 点)
	$\dfrac{\boxed{87}}{\boxed{88}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{89}}{\boxed{90}}\vec{b}$	$\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$	(5 点)

【解　説】



(1)　△OAB は 1 辺の長さが 1 の正三角形であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

同様に，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$

点 P は辺 OA を 1：3 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\vec{a}$$

点 Q は辺 BC の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

このとき，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=1$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=\left|-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right|^2\\&=\frac{1}{16}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\\&=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\dfrac{3}{4}$

［$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$を求める別解］

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\mathrm{PC}^2-\mathrm{CQ}^2\\&=\left\{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\&=\frac{9}{16}\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\mathrm{PQ}=\dfrac{3}{4}$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\\&=-\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\\&=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$のなす角を$\theta$とすると

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}\\&=\frac{\frac{3}{8}}{1\cdot\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，$0^\circ<\theta<180^\circ$ より　$\theta=60^\circ$

(2)　点 H は平面 OAB 上の点であるから，s，t を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$　とおけて

$\overrightarrow{\mathrm{QH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{QH}}$と平面 OAB は垂直であるから，平面 OAB 上の 2 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$について

$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\perp\vec{a}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\vec{a}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\perp\vec{b}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\vec{b}=0$

よって

$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\vec{a}=0$ より　$\left\{s\vec{a}+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}\right\}\cdot\vec{a}=0$

$$2s+t-1=0\quad\cdots\ ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\cdot\vec{b}=0$ より　$\left\{s\vec{a}+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}=0$

$$2s+4t-3=0\quad\cdots\ ②$$

①，②を解いて　$s=\dfrac{1}{6}$，$t=\dfrac{2}{3}$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

［$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を求める別解］

C から△OAB に垂線 CK を下ろすと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QH}}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CK}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}-\vec{c}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QH}}\\&=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}-\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$