出題のねらい

教科書にある基本的な内容が、確実に理解できているかどうかを問うています。問題は全問客観式です。このため、解答欄の複雑さに惑わされずに解答できる力を求めています。加えて、誘導のある設問では、読解力や思考力も求めています。

$\boxed{1}$ 「数学Ⅰ・A」の各分野の基本的な内容を問いました。「数と式」、「2次関数」、「場合の数と確率」、「図形の性質」、「整数の性質」の各分野から出題しました。

$\boxed{2}$ 「数学Ⅱ」の各分野の基本的な内容を問いました。「式と証明」、「複素数と方程式」、「図形と方程式」、「三角関数」、「指数関数と対数関数」の各分野から出題しました。

$\boxed{3}$ 「数学Ⅱ」の「微分法と積分法」の分野から出題しました。3次関数の極大・極小と、これらを利用した3次不等式への応用について問いました。

$\boxed{4}$ 「数列」の分野から出題しました。階差数列を用いた一般項や和の求め方について、基本的な内容が理解できているかどうかを問いました。

$\boxed{1}$

【解　答】（40点）

(1)	$\boxed{1}\sqrt{\boxed{2}}$	$4\sqrt{3}$	(3点)
	$\boxed{3}+\boxed{4}\sqrt{\boxed{5}}$ $-\sqrt{\boxed{6}\boxed{7}}$	$3+2\sqrt{3}$ $-\sqrt{21}$	(3点)
(2)	$\boxed{8}$	9	(3点)
	$\boxed{9}$	5	(2点)
	$\dfrac{\boxed{10}\boxed{11}}{\boxed{12}}$	$\dfrac{89}{8}$	(2点)
(3)	$\dfrac{\boxed{13}}{\boxed{14}}$	$\dfrac{1}{5}$	(3点)
	$\dfrac{\boxed{15}\boxed{16}}{\boxed{17}\boxed{18}}$	$\dfrac{11}{15}$	(4点)
(4)	$\boxed{19}\boxed{20}$	75	(2点)
	$\boxed{21}\boxed{22}$	60	(2点)
	$\boxed{23}\boxed{24}$	30	(2点)
	$\boxed{25}\sqrt{\boxed{26}}$	$2\sqrt{6}$	(3点)
	$\boxed{27}\sqrt{\boxed{28}}+\boxed{29}$	$3\sqrt{2}+\sqrt{6}$	(3点)
(5)	$\boxed{30}$, $\boxed{31}$, $\boxed{32}\boxed{33}$	2, 8, 16	(3点)
	$\boxed{34}$	5	(3点)
	$\boxed{35}$, $\boxed{36}\boxed{37}$	3, 24	(2点)

【解　説】

(1) $\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)$

$$=\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$=4+4\sqrt{3}+3-7=4\sqrt{3}$$

この式を用いると

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}$$
$$=\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{12}$$

(2) 2次関数 $y=-2x^2+kx+1$ のグラフが点 $(1,\ 8)$ を通るから

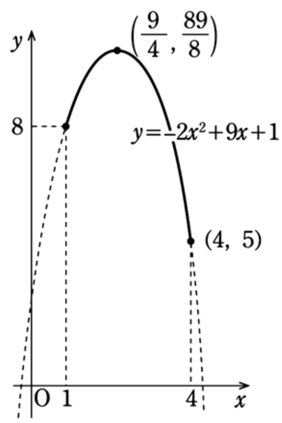
$8=-2+k+1$

よって， $k=9$

このとき

$y=-2x^2+9x+1$

$=-2\left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{89}{8}$



したがって，この2次関数のグラフは右図のようになり，$1\leqq x\leqq 4$ における y の値の範囲は

$$5\leqq y\leqq\frac{89}{8}$$

(3) 6枚のカードから2枚のカードを取り出す場合の数は

${}_6C_2=15$（通り）

3枚の $\boxed{3}$ のカードから2枚を取り出す場合の数は

${}_3C_2=3$（通り）

よって，2枚とも $\boxed{3}$ である確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$$

また，２枚とも $\boxed{2}$ である確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$$

ここで，２枚とも異なるカードである事象は２枚とも同じカードである場合の余事象であるから

$$1-\left(\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}+\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}\right)=1-\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\right)=\frac{11}{15}$$

(4) (i)　△PAB において，線分 AB は直径で P は円周上の点であるから

$\angle$APB=90°

よって

$\angle$PAB=180°−90°−15°=75°

△POQ において，線分 OP，OQ は円の半径であるから

PO=OQ=PQ=3

よって，△POQ は正三角形で

$\angle$POQ=60°

また，$\angle$PBQ は中心角$\angle$POQ の円周角であるから

$$\angle PBQ=\frac{1}{2}\angle POQ=30^\circ$$

(ii)　(i)より，△RAB において

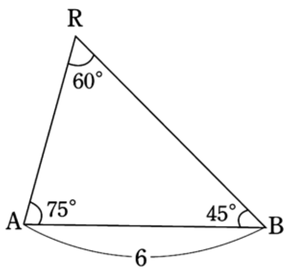
$\angle$RAB=75°

$\angle$ABR=45°

$\angle$ARB=60°

また，AB=6 より

正弦定理を用いると



$$\frac{6}{\sin 60^\circ}=\frac{RA}{\sin 45^\circ}$$

よって

$$RA=\frac{6}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ$$
$$=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{6}$$

また，RB= x とおくと余弦定理より

$$6^2=\left(2\sqrt{6}\right)^2+x^2-2\times 2\sqrt{6}x\cos 60^\circ$$

$$x^2-2\sqrt{6}x-12=0$$

２次方程式の解の公式より

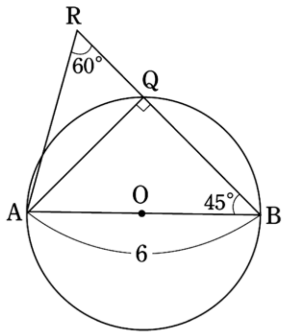
$$x=\sqrt{6}\pm 3\sqrt{2}$$

x = RB > 0 であるから

$$RB=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

［(ii)の別解］

点 A と点 Q を結ぶと△QAB は直角二等辺三角形で AB=6 より



$$QA=QB=3\sqrt{2}$$

よって，△RAQ において

$$RA=3\sqrt{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$=2\sqrt{6}$$

また△RAQ において

$$RQ=3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$$

よって

$$RB=QB+RQ$$
$$=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

(5)　$\dfrac{1}{m}+\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{2}$ より，両辺に $2mn$ をかけて

$$2n+8m=mn$$
$$mn-8m-2n=0$$

よって　$(m-2)(n-8)=16$

m，n は自然数であるから

$m-2\geqq -1$，$n-8\geqq -7$

よって，$m-2$，$n-8$ の値の組は

$m-2$	1	2	4	8	16
$n-8$	16	8	4	2	1

m，n の値の組は

m	3	4	6	10	18
n	24	16	12	10	9

以上より，m，n の値の組は

５通り

あり，上の表より $|m-n|$ が最大となるのは

$m=3$，$n=24$

のときである。

2

【解　答】（20 点）

(1)	$\boxed{38}$, $\boxed{39}$, $\boxed{40}$	3, 6, 4	（3 点）
(2)	$\boxed{41}\boxed{42}$	10	（2 点）
	$\boxed{43}\boxed{44}$	−2	（2 点）
(3)	$\boxed{45}$	6	（1 点）
	$\sqrt{\boxed{46}}$, $\boxed{47}\boxed{48}$	$\sqrt{3}$, 12	（3 点）
(4)	$\dfrac{\boxed{49}}{\boxed{50}}$	$\dfrac{4}{5}$	（1 点）
	$\dfrac{\boxed{51}\sqrt{\boxed{52}}}{\boxed{53}\boxed{54}}$	$\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$	（3 点）
(5)	$\boxed{55}$	8	（2 点）
	$\boxed{56}\boxed{57}$	−2	（2 点）
	$\dfrac{\boxed{58}}{\boxed{59}}$	$\dfrac{1}{4}$	（1 点）

【解　説】

(1)　与式の右辺を展開して整理すると

$$(x-1)^3+b(x-1)+c$$
$$=x^3-3x^2+3x-1+bx-b+c$$
$$=x^3-3x^2+(b+3)x-b+c-1$$

よって，与式より

$$x^3-ax^2+9x-3=x^3-3x^2+(b+3)x-b+c-1$$

が x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$$-a=-3,\quad 9=b+3,\quad -3=-b+c-1$$

よって，

$$a=3,\ b=6,\ c=4$$

(2)　$\dfrac{x}{1+i}=\dfrac{x(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$$=\frac{x(1-i)}{1-i^2}$$
$$=\frac{x(1-i)}{1-(-1)}=\frac{x(1-i)}{2}$$

$$\frac{5y}{3+i}=\frac{5y(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$
$$=\frac{y(3-i)}{2}$$

よって，与式より

$$\frac{x(1-i)}{2}-\frac{y(3-i)}{2}=8-6i$$

両辺に 2 をかけて

$$x(1-i)-y(3-i)=16-12i$$
$$(x-3y)+(-x+y)i=16-12i$$

x，y は実数であるから

$$\begin{cases} x-3y=16 & \cdots\cdots① \\ -x+y=-12 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

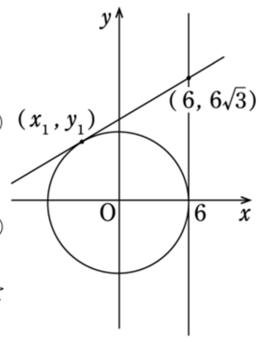
①＋②より　$-2y=4$　　$y=-2$

①に代入して

$$x+6=16 \qquad x=10$$

(3)　点 $\left(6,\ 6\sqrt{3}\right)$ から円 $x^2+y^2=36$ に引いた接線と円との接点の座標を $\left(x_1,\ y_1\right)$ とすれば接点は円 $x^2+y^2=36$ 上にあるから

$$x_1{}^2+y_1{}^2=36 \quad \cdots\cdots①$$



接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=36 \quad \cdots\cdots②$$

であり，定点 $\left(6,\ 6\sqrt{3}\right)$ を通るから

$$6x_1+6\sqrt{3}y_1=36$$

$$x_1=-\sqrt{3}y_1+6 \quad \cdots\cdots ③$$

③を①に代入して

$$\left(-\sqrt{3}y_1+6\right)^2+y_1{}^2=36$$
$$4y_1{}^2-12\sqrt{3}y_1=0$$
$$4y_1\left(y_1-3\sqrt{3}\right)=0$$

$$y_1=0,\ \ 3\sqrt{3}$$

よって，③より

$y_1=0$ のとき　$x_1=6$

$y_1=3\sqrt{3}$ のとき　$x_1=-3$

したがって，②より求める接線の方程式は

$6x=36$ より　$x=6$

$-3x+3\sqrt{3}y=36$ より

$$x-\sqrt{3}y+12=0$$

［(3)の別解］

図より，点 $\left(6,\ 6\sqrt{3}\right)$ から円 $x^2+y^2=36$ に引いた接線の１本は y 軸に平行なので，方程式は

$x=6$

もう１本の接線の傾きを m とすれば，その方程式は

$$y-6\sqrt{3}=m(x-6)$$

$$mx-y-6m+6\sqrt{3}=0 \quad \cdots\cdots ④$$

円の中心（0，0）とこの接線との距離は６であるから

$$\frac{\left|-6m+6\sqrt{3}\right|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=6$$

よって

$$\left|m-\sqrt{3}\right|=\sqrt{m^2+1}$$

両辺を平方して

$$m^2-2\sqrt{3}m+3=m^2+1$$

$$m=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

④に代入して整理すれば

$$x-\sqrt{3}y+12=0$$

(4)　$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ のとき

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$\sin^2\theta+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1$$

$$\sin^2\theta=\frac{16}{25}$$

θ が第２象限の角であるから

$\sin\theta>0$ より　$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

したがって，加法定理より

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

(5)　方程式 $\log_2 x-\log_x 256=2$ において

$$\log_x 256=\frac{\log_2 256}{\log_2 x}$$
$$=\frac{\log_2 2^8}{\log_2 x}=\frac{8}{\log_2 x}$$

よって，与方程式は

$$\log_2 x-\frac{8}{\log_2 x}-2=0$$
$$\left(\log_2 x\right)^2-2\log_2 x-8=0$$
$$\left(\log_2 x-4\right)\left(\log_2 x+2\right)=0$$

ここで，$0<x<1$ であるから

$\log_2 x<0$

よって　$\log_2 x=-2$

$x=2^{-2}$ より

$$x=\frac{1}{4}$$

3

【解　答】（20点）

(1)	60 , 61	3, 2	（3点）
(2)	62 63	−2	（3点）
	64 65 66	100	（2点）
	67	0	（2点）
	68	0	（1点）
(3)	$\dfrac{69\ 70}{71}$	$\dfrac{-7}{3}$	（5点）
	72 73	−2	
	74	5	（4点）

【解　説】

(1)　$f(x)=ax^2(x+3a)$　……①

$$=ax^3+3a^2x^2$$

であるから，微分すれば

$$f'(x)=3ax^2+6a^2x$$
$$=3ax(x+2a)\quad\cdots\cdots②$$

(2)　$a=\sqrt{5}$ のとき，(1)より

$$f(x)=\sqrt{5}x^3+15x^2$$
$$f'(x)=3\sqrt{5}x\left(x+2\sqrt{5}\right)$$

よって，$f'(x)=0$ とおくと

$x=0$，$-2\sqrt{5}$

下の増減表より $f(x)$ は

x	$\cdots$	$-2\sqrt{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$x=-2\sqrt{5}$ のとき極大で，極大値は

$$f\left(-2\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}\left(-2\sqrt{5}\right)^3+15\left(-2\sqrt{5}\right)^2$$
$$=\sqrt{5}\left(-40\sqrt{5}\right)+15\cdot 20$$
$$=100$$

また，$x=0$ のとき極小で，極小値は

$f(0)=0$

(3)　②より $f'(x)=0$ のとき　$x=0,\ -2a$

ここで，$a\neq 0$ より，　$a<0,\ 0<a$

で場合分けして考える。

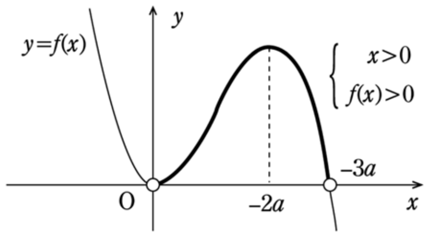
(i)　$a<0$ のとき，$-2a>0$ より

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

また，①より

$f(x)=0$ のとき　$x=0,\ -3a$

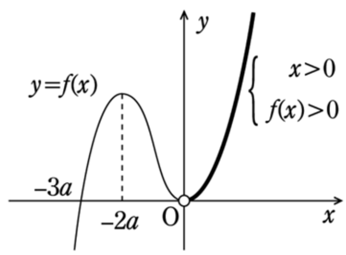
よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は下の図。



(ii)　$a>0$ のとき，$-2a<0$ より

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

(i)と同様に，$y=f(x)$ のグラフの概形は下の図。



(i)，(ii)のグラフの概形より

不等式 $f(x)>0$ を満たす自然数 x の値が 6 個だけ存在する場合は (i) で $x=1, 2, 3, 4, 5, 6$

すなわち　$6<-3a\leqq 7$

を満たすときである。

よって

$6<-3a$ 　より　$a<-2$

かつ

$-3a\leqq 7$ 　より　$-\dfrac{7}{3}\leqq a$

すなわち

$-\dfrac{7}{3}\leqq a<-2$ （⑤）

（注）(ii) の場合，$f(x)>0$ を満たす自然数 x の値は無数に存在するから，題意に適する a の値の範囲はない。

4

【解　答】（20 点）

(1)	75 76	37	（3 点）
(2)	77 , 78 , 79	2, 2, 2	（4 点）
	80 , 81 , 82	3, 5, 6	（4 点）
(3)	83 84	14	（3 点）
	85 86	92	（2 点）
	87 , 88	9, 6	（4 点）

【解　説】

(1)　第 1 行の数の並びとその階差をとると

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1, & & 2, & & 4, & & 7, & & 11, & & 16 \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \end{array}$$

であるから，第 1 行第 9 列の数 a_9 について

$$\begin{aligned} a_9 &= 1+(1+2+3+4+5+6+7+8) \\ &= 1+\frac{8\times(8+1)}{2} \\ &= 37 \end{aligned}$$

(2)　(1)と同様に，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 1+\{1+2+3+\cdots+(n-1)\} \\ &= 1+\frac{(n-1)\{(n-1)+1\}}{2} \\ &= 1+\frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2-n+2}{2} \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

①は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - k + 2}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k + 2)$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + 2n \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{6} \left\{ (n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 12 \right\}$$
$$= \frac{n}{12}(2n^2 + 10)$$
$$= \frac{n^3 + 5n}{6}$$

(3)　$a_n \leqq 100$ のとき，①より

$$\frac{n^2 - n + 2}{2} \leqq 100$$
$$n^2 - n \leqq 200 - 2$$
$$n(n-1) \leqq 198$$

ここで

n=14 のとき　$n(n-1) = 182$

n=15 のとき　$n(n-1) = 210$

したがって，$a_n \leqq 100$ を満たす最大の自然数は

n=14

このとき，①より

$$a_{14} = \frac{14^2 - 14 + 2}{2} = 92$$

すなわち，第 1 行第 14 列の数が 92 であるから

100 について

行数は，第 1 行から $(100-92)$ 行増えるので

$1 + (100 - 92) = 9$

列数は，第 14 列から $(100-92)$ 列減るので

$14 - (100 - 92) = 6$

よって

100 は第 9 行第 6 列の数である。